2024/3 (19. vol.)
71-81
ERUDITIO-EDUCATIO
Tanulmányok / Studies

A végtelen mint fogalom a matematika oktatásában

Vontszemű Miklós

Infinity as a concept in mathematics education
Abstract
This paper explores the introduction and teaching of the concept of infinity in mathematics. Since a correct development of the concept of infinity is essential for the successful completion of studies in this field, especially in higher education, this paper collects information known on this topic. This is complemented by a historical background on the subject, related basic concepts, various illustrative examples and exercises, all suitably formulated. All of this is summarised in a methodologically illuminated way, even as a possible resource for teachers. Nevertheless, it should be interesting reading for anyone curious about one of the most important abstract concepts in mathematics, infinity.
Keywords: mathematical concepts; infinity; education
Subject-Affiliation in New CEEOL: Social Sciences – Education – School Education
DOI: 10.36007/eruedu.2024.3.071-081

Bevezetés

A végtelen fogalma a mindennapokban, a filozófiában, a teológiában és a matematikában is megjelenik, értelmezése azonban eltérő lehet. Ha a szó jelentését vesszük, akkor vég nélkülit vagy határtalant jelent, további szépsége, hogy főnévként és melléknévként is használatos. A matematika területén fontos szerepet játszik a végtelen fogalmának helyes megismerése. Épp ezért a végtelent és a hozzá kapcsolódó fogalmakat körüljárva, a sikeres megértést segítő módszereket kutatva egyes meglátások kerültek összefoglalásra, tapasztalatokkal kiegészítve. Egy rövid történelmi bevezető után ismertetésre kerülnek különböző példák, amelyek mind a végtelen fogalmának megértését hivatottak segíteni. A kapcsolódó alapfogalmakon belül specifikus szemléltető feladatok is helyet kaptak.

Történelmi áttekintés

A végtelen mint fogalom már évezredek óta foglalkoztatja az emberiséget. Vegyük például az ókori gondolkodókat. Mivel az akkori tudósok inkább polihisztorok voltak, sem minthogy kizárólag egy konkrét témakör szakértői, ezért a tudományok több területén is szembetalálhatták magukat a végtelen meghatározásának kérdésével. Ott van például a filozófia területén a létezés kérdése: volt-e kezdet, lesz-e vég? A csillagászat tudományterületén, a messzeségből adódóan, a végtelen távolság felmerülése. Van e olyan csillag, amely olyan messze van, hogy bármekkora is, nem látszik a Földről? Ezekhez kapcsolódva a fizikában az idő és a tér végtelenségének kérdése. Vegyük továbbá a matematikában a legnagyobb szám létezésének felvetését, vagy a végtelenszer elvégzett felezés eredményét. Az előbbi a végtelen nagy, az utóbbi a végtelen kicsi fogalmakat hozza magával. De a végtelen megjelent indirekt módon is, például az egy egységnyi oldalú négyzet átlójának kiszámításánál, ami $\sqrt{2}$ és mint ismert, egy irracionális szám, ami végtelen számú tizedesjegyből áll. Hasonlóan az előzőhöz az egységnyi átmérőjű kör kerülete, a ϖ vagy akár az aranymetszés meghatározásnál. Nem utolsósorban a végtelen illúziókon keresztül is megjelenhet, mint például két tükör szembefordítása.

Feljegyzések szerint az ókori Görögországban foglalkoznak először összetettebben a végtelennel. Az említett végtelen gyakorlati problémái megjelennek Zénón paradoxonjainál. Ezek közül talán a legismertebb Akhilleusz és a teknősbéka paradoxona. A paradoxon ellentmondást jelent, és azért kapta ezt az elnevezést, mert nem logikus és az ép észnek ellentmondó következtetésre jutottak. A feladatban Akhilleusz gyorsan fut, a teknősbéka viszont lassú, ez eddig valósághű. A feltételezés szerint, ha Akhilleusz egy bizonyos távolságú előnyt ad a teknősbékának, akkor soha nem éri utol. Ez a feltételezés viszont már a valóságtól elrugaszkodott (innen a paradoxon), mivel tapasztalatból tudjuk: ha Akhilleusz véges távolságú előnyt ad, egy véges időn belül utol is éri a teknőst, ha gyorsabb nála. Zénón gondolatmenete az volt, hogy míg Akhilleusz odaér, ahol a teknős indul, addig idő telik el, és az alatt az idő alatt a teknős valamennyi utat megtesz. Majd hiába rövidebb az út, Akhilleusznak ezt meg kell ismételnie, amíg a teknős megint elmozdul. Ha ezt végtelenszer megismétli, utoléri-e valaha a teknőst? Elgondolkodtató ez a feladat, és a megértésével közelebb kerülhetünk a végtelen sorok viselkedéséhez, amelyre a későbbiekben még visszatérünk (Feng 2023; Theunissen 2021).

Voltak, akik nem egyértelműen mondták ki a végtelen létezését. Arisztotelész megkülönböztetett aktuális és potenciális végtelent. A potenciális végtelen számok olyan sorozata, amit mindig lehet folytatni (pl. természetes számok). Ebben az esetben az aktuális végtelen jelentené a természetes számok összességét, de az aktuális végtelent nem fogadták el. Ezeknek a fenntartásoknak köszönhetően sokáig nem beszéltek egyértelműen végtelenről. Euklidész már körvonalazta, hogy „bárminél több prímszám létezik", mégis csak jóval később fogadták el tételként, hogy végtelen sok prímszám van. Európában a középkorban a tudományosság háttérbe szorulása figyelhető meg, és ennek eredményeként egyre kevésbé foglalkoztak a végtelen fogalmával is. Ez betudható akár annak a következménynek, hogy a vallás került a középpontba, és a végtelen fogalma pedig a tudományos megközelítés helyett a teológia területére került át. A reneszánsz korától kezdett újra éledezni a tudományosság a matematika területén is. Az általunk ismert „∞" végtelen szimbólum John Wallis angol matematikustól számazik, aki 1655-ben használta azt először. Az újkori matematikában, annak több ágában is áttörések történtek a végtelen értelmezésében. A geometriában a végtelen távoli pont bevezetésével létrejött a projektív geometria. Az analízisben pedig a végtelen kis részekre bontás által megjelent az integrálszámítás. Majd a határérték bevezetése jelentette a végtelen értelmezésének újabb szintjét. Ezen fogalmakban már használták a végtelent, viszont a definícióját csak a későbbiekben, a halmazelmélet létrejöttével tudták megadni. Georg Cantor volt a halmazelmélet megalkotója. Az elméletben akadtak problémák és ellentmondások, mint például a Russel-paradoxon. Egy másik ismert néven a borbélyparadoxon a szemléltető feladatról kapta az elnevezését, ami az absztrakt matematikai jelölést ülteti át közéleti példába az alábbi módon:

Egy kaszárnya katonai borbélya a szabályzat szerint azokat a katonákat köteles megborotválni, akik maguk nem borotválkoznak, és nem borotválhatja azokat, akik maguk borotválkoznak. Egy felmerülő kérdés, hogy megborotválhatja-e saját magát. Ha maga borotválkozik, akkor nem lenne szabad a szabályzat szerint, ha pedig nem borotválkozik, akkor köteles lenne megborotválni magát. Így mindkét esetben vét a szabályzat ellen (Acosta 2023).

Az ehhez hasonló problémákat később a halmazelmélet axiomatizálásával sikerült kiküszöbölni, ami Neumann János, Paul Bernays, Kurt Gödel mellett Zermelo és Frankel neveihez fűződik. Így végre eljutottunk a végtelen mai matematikai értelmezéséhez (Moore 1995; Batchelor 2002).

A végtelen

A végtelen matematikai fogalom alapvető értelmezésének átadása nem könnyű feladat. Ennek egyszerű oka, hogy a végtelen, mint olyan, megfoghatatlan és elvont, mivel a való életben csak véges számokkal van tapasztalatunk. De hol is találkozhat először a diák a végtelennel? Meglepő lehet a válasz, hogy már az alapiskolában, vagy még korábban. Valószínű, hogy hallottunk már vitatkozó gyerekről, hogy melyikük tud nagyobb számot mondani. Természetesen egyikük sem, hiszen mindig mondható nagyobb szám. Az oktatásban már az alapoktól megjelenik a számegyenes és az egyenes a geometriában, de itt még csak említve van, hogy az számegyenes végtelen. Fontos hangsúlyozni, hogy ne az rögzüljön a diákokban, hogy az egyenes addig tart, amíg a lap, de még nem lehet átfogóan definiálni. Majd a számhalmazok témakörénél komolyabban előtérbe kerül, hogy végtelen számú természetes szám van. Később a racionális számoknál gondoljunk csak a szakaszos tizedesszámokra, ahol végtelen ismétlődést jelölünk. Ezt kihasználva célszerű lenne a végtelen fogalmának bevezetését egy feladvánnyal kezdeni, mégpedig a következővel:

Milyen kapcsolat (reláció (<,=,>)) áll fenn a két érték között?
0,999… ? 1

Nagy valószínűséggel azt a választ kapjuk, hogy az egy a nagyobb. A helyes válasz azonban az egyenlőség. A válaszokból máris képet kaphatunk arról, hogy kik azok, akik valamennyire képben vannak az eddigi ismeretekkel, és tudják azokat alkalmazni.

A kételkedőknek egyszerű elemi matematikával bizonyítható a feljebbi állítás (Norton – Baldwin 2011/2012):

$$x = 0.999\ldots \quad /*10$$
$$10x = 9.999\ldots \quad /-x$$
$$10x-x = 9.000\ldots$$
$$9x = 9 \quad /:9$$
$$x = 1$$

A szakaszos ismétlődéshez hasonlóan az irracionális számoknál fontos állandók, mint például a ϖ vagy az *e* (Euler-féle szám) kapcsán kerül képbe a végtelen. Az ilyen állandókkal való számításoknál fontos kiemelni, hogy az eredményt kerekítve értjük. A számhalmazok nagyságainak összehasonlításánál a diákok már szembetalálják magukat a különböző „nagyságú" végtelennel. Tipikus példa a melyikből van több: a természetes számokból vagy a számegyenesen a nulla és egy között elhelyezkedő számokból?

A végtelen fogalmának mélyebb értelemzéséhez szükség van a halmazelmélet alkalmazására. Azt mondjuk, hogy minden, ami nem véges elemszámú halmaz, az végtelen számosságú. A végtelen számosságú halmazok között megkülönböztetünk megszámlálható és megszámlálhatatlan (kontinuum) végtelent. Mindemellett megszámlálható végtelen halmazok között is lehetnek különböző nagyságok. A legegyszerűbb példa a páros számok halmazát összehasonlítani a természetes számok halmazával. Látható, hogy mindkét halmaz végtelen elemet tartalmaz, de a természetes számokból „érezhetően" kétszer több van, mivel a páros számokból annyi van, mint a páratlan számokból. Ez már a halmazok sűrűségének a területe.

A végtelen halmazok számossága közti különbséget talán a leképezéssel (hozzárendeléssel) a legmegfelelőbb szemléltetni. Azért megszámlálhatóan végtelen sok páros szám van, mert mindegyiket hozzá tudjuk rendelni pontosan egy, soron következő természetes számhoz. Ha úgy tetszik „indexelni" tudjuk egytől kezdve a természetes számokkal. Ezért megszámlálhatóan végtelen sok páros, páratlan, prímszám, Fibonacci-szám… van. Ha a feljebb is említett nulla és egy közötti racionális számokat nézzük, nem tudjuk hozzárendelni („indexelni"), mert nem tudjuk megmondani, hogy melyik racionális számot rendelnénk az egyhez. És az irracionális számokat még nem is említettük. Tehát a nulla és egy között megszámlálhatatlan végtelen szám van. Fontos feladat, hogy megértessük a különbséget.

A végtelen halmazok számosságának szemléltetésére David Hilbert német matematikus Grand Hotel problémája (1924) is jól alkalmazható. Másnéven a Hotel-paradoxon egy híres gondolatkísérlet, amely a végtelen fogalmát hivatott közelebb hozni az emberekhez (Hilbert 1984).

A *Hilbert-hotel* egy olyan képzeletbeli szálloda, amelyben *végtelen sok szoba* van. A szobák 1-től kezdve a természetes számokkal vannak megszámozva. A hotelben található továbbá egy hangosbemondó, amit minden szobában hallani. Tegyük fel, hogy teltház van, azaz *minden szoba foglalt*.

Probléma 1: Egy új vendég érkezik. Egy valós hotelben, ha már nincs szabad szoba, nem tudnák fogadni az új vendéget. Itt viszont az új vendég könnyen elhelyezhető.

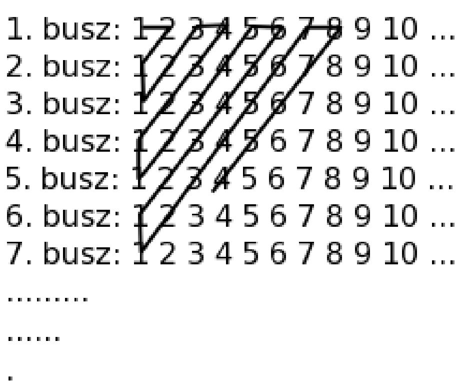
Megoldás: A portásnak csupán annyit kell kérnie a hangosbemondón keresztül, hogy minden vendég költözzön át az eggyel nagyobb sorszámú szobába. Így a költözködés után felszabadul az 1-es sorszámú szoba, ahová beköltözhet az új vendég.

Probléma 2: Végtelen sok új vendég érkezik. Elszállásolhatóak-e vajon mindenki?

Megoldás: A portás megkér minden vendéget, hogy költözzön át abba a szobába, amelynek sorszáma az aktuális szobaszám kétszerese. Így az 1-es szoba lakói a 2-es szobába költöznek, a 2-es szoba lakói a 4-esbe, a 3-as szoba lakói a 6-osba, és így tovább. Ezáltal minden páratlan sorszámú szoba felszabadul, amelyekbe beköltözhet a végtelen sok új vendég.

Probléma 3: Végtelen sok autóbusz érkezik, és mindegyikben végtelen sok vendég. Vagyis végtelen sokszor végtelen sok vendéget kell elhelyezni az amúgy teltházas szállodában.

Megoldás: Sorszámozzuk be a buszokat, és azokon belül az egyes utasokat. Ekkor az alábbi, mindkét dimenzió mentén végtelen táblázatban az összes utas szerepel:



1. ábra: A hotelbe érkező buszok és utasok

A kétdimenziós probléma visszavezethető az előző egydimenziós problémára, ahol csak egyetlen végtelen vendégsorozatunk volt, ahol minden utas pontosan egyszer szerepel. Ehhez mindössze annyit kell tenni, hogy a fenti ábra eljárása alapján állítjuk sorba az utasokat (ezt a sorbaállítási eljárást *átlós módszernek* is nevezik, amely Cantor nevéhez fűződik). A sorban érkező végtelen vendéget pedig az előző probléma megoldásában leírtak alapján el lehet helyezni. Ez csak egy lehetséges megoldás, akár más módon is sorba rendezhetjük a vendégeket, de talán ezt a legegyszerűbb ábrázolni. Hasonló elven működik ez a megoldás több dimenzióban is, például, ha végtelen számú hajó végtelen számú autóbuszt hozna, rajtuk végtelen számú utassal.

Probléma 4: Új vendégek fognak érkezni, akik mind *egymás melletti szobákban* szeretnének aludni, viszont azt nem tudni előre, hogy összesen hány vendég fog éjszaka érkezni, pusztán annyi, hogy a számuk *véges* lesz. Vagyis most úgy kell a vendégeket átköltöztetni, hogy a költöztetés után legyen tetszőlegesen hosszú, egymással szomszédos üres szobákból álló szekció.

Megoldás: A portásnak arra kell megkérnie a vendégeket, hogy mindenki az aktuális szobaszámát emelje négyzetre, és költözzön át az így kapott számú szobába. Tehát az 1-es szoba lakói helyben maradnak, a 2-es szoba lakói a 4-esbe költöznek, a 3-as szoba lakói a 9-esbe, a 4-es szoba lakói a 16-osba, és így tovább. A költözés után tehát pontosan a négyzetszámot viselő szobák lesznek foglaltak. Mivel a négyzetszámok között egyre növekvő hézagok vannak, ezért tetszőlegesen sok, de véges számú új vendég számára lehet találni olyan egymás melletti szobákat, amelyek mindegyike szabad. Ezen felül több szabad szoba is marad, így ha esetleg végtelen sokszor is érkezik további véges számú vendég, elhelyezhetőek további költöztetés nélkül.

A fentebb vázolt problémák nem ellentmondások, csak a józan észnek mondanak valamennyire ellent. Nem egyszerű megszokni, hogy végtelen sok elem halmazáról gondolkodjunk, és nehéz elfogadni, hogy az ilyen halmazok tulajdonságai és viselkedése eltérhet a véges halmazok tulajdonságaitól és viselkedésétől.

A végtelenhez kapcsolódó alapfogalmak

Sorozat

A **sorozat** fogalmával valószínűleg már találkoztak a diákok, hiszen akár a természetes számokról vagy prímszámokról beszélünk, számsorozatokkal dolgozunk, mégis fontos tisztázni a definíciót:

Olyan sorozatokat, amelyek számokból állnak, számsorozatnak (továbbiakban sorozat) nevezzük. Megadása történhet körülírással, képlettel vagy rekurzióval. Előállhatnak nemcsak véges, de végtelen sorozatok is.

A témakörnél meglátásom szerint van egy fontos feladatunk, mégpedig pontosítani a hiányosan rögzült tudást, mint például egy első néhány elemmel megadott sorozat folytatását. Ez az a feladat, amivel nagy valószínűséggel valahol már találkoztak a diákok. A „folytasd a sort" típusú feladatok akár versenyeken, intelligenciatesztekben vagy az általános iskolás matematikaórákon is szerepelhetnek. Ennek az a bökkenője, hogy képzési szabály hiányában a következő elem bármi lehet:

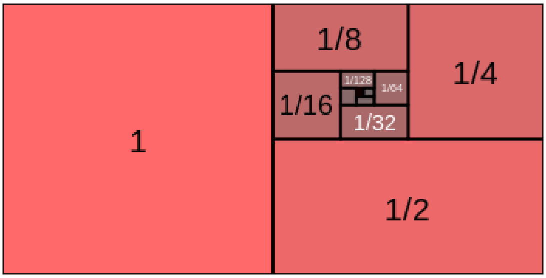
Legyen például az első néhány elem: 0, 1, 2, 3, … . A legelterjedtebb válasz az, hogy ez a természetes számok felsorolása, azaz a folytatás: 4, 5, 6, ... Egy másik szabály lehet, hogy a sorozat periodikusan ismétlődik, azaz a folytatás: 0, 1, 2, 3, 0, 1, ... Viszont semmi nem tiltja, hogy más következzen, vagyis lehet más is a sorozat „logikája". Erre különösen fontos felhívni a figyelmet, mert a laikusok gyakran esnek abba a hibába, hogy pusztán a saját logikájuk alapján képesek elfogadni egy sorozat elemeinek folytatását. A következő esetben legyen a sorozat első öt eleme: 3, 1, 4, 1, 5, … . A sorozat egyik logikus folytatása: 1, 6, 1, 7, … . Ugyancsak fel lehet ismerni a pi első számjegyeit is, és a sorozatot úgy folytatni, hogy: 9, 2, 6, . . . , akár meg is fordulhat a periódus, ebben az esetben: 1, 4, 1, 3, … . Ezen túl interpolációval is lehet az adott elemekre polinomot illeszteni, melynek értékei megadják a sorozat hátralevő tagjait. Igazából bármi lehet a következő szám, addig, amíg nincs pontosan meghatározva a sorozat a definíciónál leírt három lehetőség egyikével.

Sor

Ha egy sorozat elemeit összeadjuk, azt sornak nevezzük. Ha számok végtelen sorozatának összegét képezzük, akkor végtelen sort kapunk.

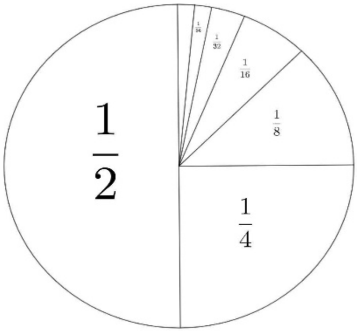
A **sorok** bevezetésénél fontos hangsúlyozni a különbséget a sorozat és a sor között. Míg az előbbi alatt számok sorozatát értjük, addig az utóbbin az adott sorozat tagjainak összegét (akkor is, ha végtelen sok számról beszélünk). A végtelen sok szám összeadásánál fontos a jó szemléltetés. Ennek érdekében olyan példákat célszerű felhozni, amelyek mindennapi eszközökkel szemléltethetők. Az egyik, erre a célra teljesen alkalmas feladat így hangzik:

Ha először lerakok egy *1* m^2 területű csempét, majd melléteszem a felét, ismételten a felét, és így tovább, végtelenszer megismételve ezt a folyamatot, akkor mekkora területű csempém lesz lerakva? (Az egység természetesen eltérhet.)



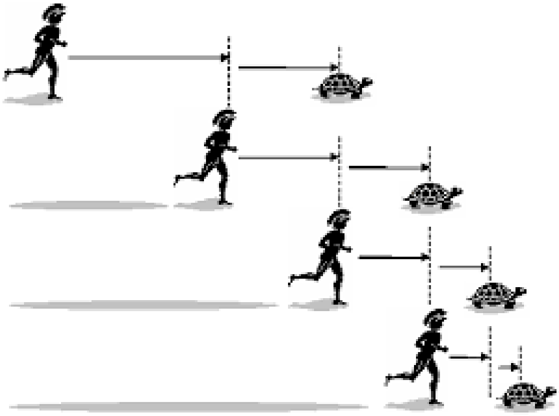
2. ábra: Csempelerakás

Hasonlóan az előzőhöz, kivonásra is alkothatunk a mindennapokra levetített példát. Ha van egy tortánk és az első embernek a felét adjuk, majd a következőnek a maradék felét (tehát az egész negyedét), a következőnek szintén a maradék felét, és így tovább… hány embernek jut torta? A gyakorlatban bizonyos számú lépés után kivitelezhetetlen ugyan, de ez a példa segít rávezetni az elméletre. A cél az, hogy a feladatmegoldó megsejtse, hogy elméletben nem csak véges sokszor tudunk felezni. Ha valaki azt válaszolja, hogy nem marad torta, az jó úton jár.



3. ábra: Tortafelezés

A végtelen sorok szemléltetésére a már korábban is említett Akhilleusz és a teknős paradoxonja is kiválóan alkalmas. A probléma ismertetése után a diákok elgondolkodnak, hogy miért tűnhet a feltételezés és a tapasztalat ellentmondásnak. A leírás logikusnak tűnik, hogy mire Akhilleusz a teknős pozíciójába ér, addigra a teknős valamennyit elmozdul, és ha ezt véges alkalommal ismételjük, akkor soha nem éri utol. A valóságban persze tudjuk, hogy utolérné a teknőst.



4. ábra: Akhilleusz és a teknős paradoxona

Határérték, konvergens, divergens

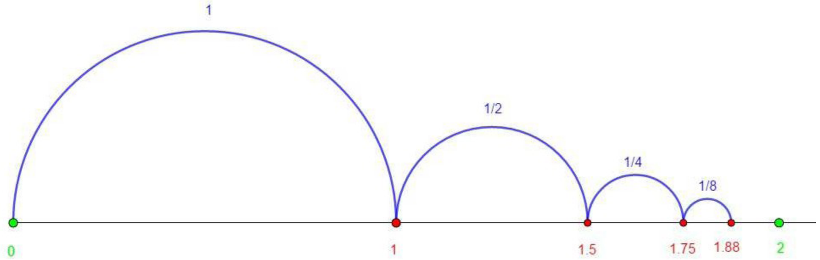
A határérték megértéséhez és helyes alkalmazásához az eddig felsorolt ismeretek elengedhetetlenek. Ahogyan az is, hogy nem akkor érti egy hallgató a határérték fogalmát, ha 100 példát kiszámoltatunk vele, hanem akkor, amikor a feladatokat önállóan meg tudja oldani, mert tisztában van vele, hogy mit csinál. Az állításomat alátámasztja a saját tapasztalatom is arról, amikor én tanultam ezt diákként. A definíció bemagolása nem egyenlő a készségszinten való alkalmazással. Épp ezért, bár általában szorított a tempó és nincs elég idő az oktatásban erre, mégis aki teheti, javaslom, hogy alkalmazza legalább a definíció kiegészítéseként az alábbi szemléltetéseket, mert visszajelzésből és saját tapasztalatból is mondhatom, sokat segítenek a minél gyorsabb megértésben.

Sokszor nehéz dolgunk van matematikatanárként, mert nagyon pontosan kell fogalmaznunk, de közben ha valaki, esetleg többen nem értik, el kell tudnunk mondani „konyhanyelven", hogy nagyobb eséllyel megértsék. Olykor nehéz egyszerre szakmainak és érthetőnek lenni. Ezért most a pontos definíciót szándékosan kihagyva (úgyis számtalan forrásból megtalálható) inkább a laikus oldalról nézve igyekeztem megfogalmazni nagyjából félúton a két megközelítés között, hogy mi az a határérték.

Az előzőekben említett soroknak lehet határértéke, továbbá függvényeknek és egyéb matematikai objektumoknak is. Határértéknek nevezzük azt, ahová a sor tart. Mit értünk az alatt, hogy „tart"? Pontosan azt, hogy egy bizonyos elem után a sor további elemei csak egy bizonyos környezetben lesznek. A környezet pedig egy tetszőlegesen kis intervallum. Ennél a témakörnél gyakran jó segítséget nyújt, ha az elemeket, jelen esetben a sorozat elemeit bogarakhoz vagy rovarokhoz hasonlítjuk példáinkban. Ebben az esetben a szemléltető példa lehetne egy hangyavonulat, ahol a hangyák a sorozat elemei, a határétékük pedig a hangyaboly, ahová tartanak.

A határértékhez kapcsolódó fogalmak a konvergens és divergens. Egy sorozat akkor konvergens, ha létezik határértéke, ellenkező esetben divergens. A konvergencia a matematikai analízis egyik alappillére. Elemek sorozatának konvergenciáján azt értjük, hogy az elemek határértékben végtelen kis távolságra megközelítenék azt. A matematikai analízis kiemelkedően fontos feladata, hogy a „végtelen közeli" kifejezésnek pontos értelmet adjon és ezzel a határérték fogalmát matematikai eszközökkel megfoghatóvá tegye. A konvergens és a divergens fogalmak értelmezéséhez talán a legegyszerűbb szemléltetés egy számegyenes, ahol egy pontszerű bolha ugrál az általunk meghatározott módon. Három ilyen meghatározás lesz:

Első esetben a bolha fáradékony és mindig feleakkorát bír csak ugrani:

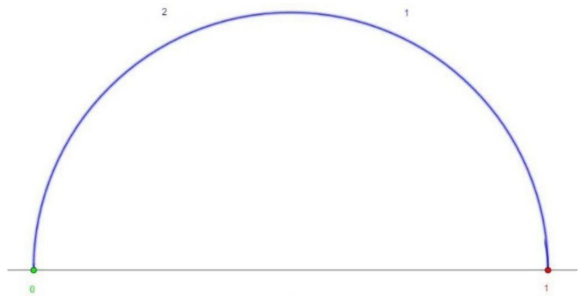


5. ábra: Bolha ugrása a számegyenesen 1

Szemléletesen látható és könnyebben elképzelhető így a diákoknak elsőre, mint ha csak a felírást látnák:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n}\frac{1}{2^n}=2$$

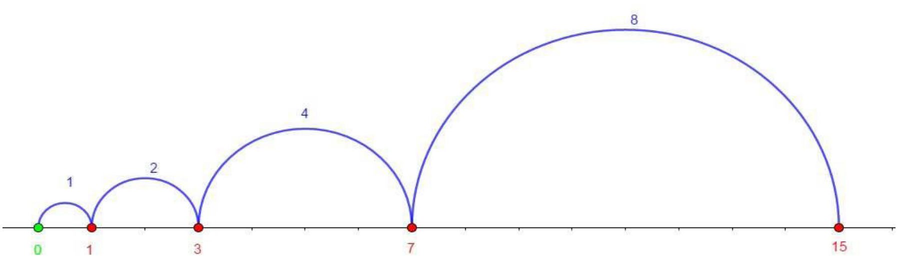
A **második** bolha nem fáradékony ugyan, de nem tudja eldönteni, melyik irányba mozogjon, ezért felváltva ugrik jobbra és balra:



6. ábra: Bolha ugrása a számegyenesen 2

Ebben az esetben a sorozatnál mutatható meg, hogy nem tart sehová. Azt mondjuk, hogy nincs határértéke, ezért divergens.

A harmadik bolha egyre nagyobbakat ugrál, pontosan kétszer akkorát, mint előtte:



7. ábra: Bolha ugrása a számegyenesen 3

Itt a ábrázolásával világosan látható, hogy a végtelenbe tart, ezért divergens lesz.

Befejezés

Tanárként fontos, hogy azt, amit mi már jól értünk, át tudjuk adni a megfelelő szinten a hallgatóknak. Ehhez ajánlott megfigyelni a saját megértésünk folyamatát, felidézni, mi volt az, ami kulcsszerepet játszott abban, hogy az adott témakörben a fogalmakat és lépéseket megértsük. A végtelen fogalmának megértése különösen nehéz, mivel kézzelfoghatatlan. Éppen ezért fontosnak tartom a lehető legjobb példák és feladatok kíséretében oktatni. Célul tűzném ki, hogy az elvont fogalmakra a matematikában ne „mumusként" gondoljanak a diákok, és ezért meg se próbálják megérteni. Napjainkban egyre nagyobb hangsúlyt kap az oktatás módszertana, ami a gyakorlatban sohasem tökéletes, de támogatom az oktatás során a tudatos törekvést arra, hogy ne csak információt adjunk át, hanem azt a lehető legmegfelelőbb köntösben tegyük. Úgy gondolom, ha sikerül érdekessé tenni, szemléletesebben átadni az információt és ezáltal közelebb hozni a végtelent, már sikeres volt a törekvés.

Irodalom

Acosta, Carlos (2023): *Russell's Paradox and The Barber Paradox: A New look at an Old Problem*.

Batchelor, John (2002): *The History and Evolution of the Concept of Infinity.* Iowa State University.

Bronstejn, I. N. – Musiol, D. – Mühlig, H. – Szemengyajev, K. A. (2009): *Matematikai kézikönyv.* Budapest: Typotex.

Feng, James Q. (2023): The Fallacy in the Paradox of Achilles and the Tortoise. *Qeios,* 245–265.

Hilbert, David (1984): *On the Infinite.* Cambridge University Press.

Laczkovich Miklós – T. Sós Vera (2012): *Valós analízis I.* Budapest: Typotex.

Laczkovich Miklós – T. Sós Vera (2013): *Valós analízis II.* Budapest: Typotex.

Moore, Adrian William (1995): *A Brief History of Infinity.* Scientific American.

Norton, Anderson – Baldwin, Michael (2011/2012): Does 0.999… Really Equal 1? *The Matematics Educator,* 2011/2012, Vol. 21, No. 2, 58–67.

Pólya, György – Szegő, Gábor (2004): *Problems and theorems in analysis I.* Springer.

Rózsa Péter (1978): *Játék a végtelennel.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Theunissen, Theo – Oud Johan, H. L (2021): Achilles and the Tortoise 2500 Years after Zeno. *Logique et Analyse*, vol. 255.

Thomas, George B. – Weir, Maurice D. – Hass, Joel – Giordano, Frank R. (2007): *Thomas-féle Kalkulus III.* Budapest: Typotex.