

Vzťah myslenia, reči/jazyka a výrokovej logiky v kontexte rozvíjania logiky v prírodovedných predmetoch

Katarína Szarka – Zoltán Fehér

The relationship between thinking, speech/language and propositional logic in the context of developing logic in science subjects

Abstract

The current study investigates the connection between thinking, language and propositional logic. Mathematical thinking as an essential component of mathematical competence forms an integral part of the problem-solving of everyday life. Mathematics is a tool of the human skillset for correct and accurate thinking. Logical thinking can be helpful in developing thinking, which is the basis for the ability to solve problems in a creative, non-standard and non-learned schemes way. Propositional logic as a mathematical discipline forms the basic apparatus for logical reasoning that fundamentally supports scientific thinking. Based on the theoretical analysis of literary sources we characterize thinking, language and propositional logic and give a holistic picture of the theme.

Keywords: thinking; language; propositional logic; mathematics; science

Kľúčové slová: myslenie, jazyk, výroková logika, matematika, prírodné vedy

Subject-Affiliation in New CEEOL: Social Sciences – Education – School Education

DOI: 10.36007/eruedu.2021.3.005-013

„Učenie sa začína aktívnou činnosťou a vnímaním, z ktorého sa tvoria pojmy a formulácie, a nakoniec vedie k správne mysleniu.“

(Pólya György)

Úvod

Pochopenie toho, ako myslíme, získavame poznatky a ako sa učíme súčasnosti, je skúmané z rôznych aspektov – od genetických aspektov, epistemológie, filozofie myslenia, štruktúry jazyka, teórie vzdelávania až po ďalšie oblasti. V súčasnosti je predmetom debaty odborníkov, ako možno identifikovať všeobecné aspekty myslenia v rôznych kontextoch.

Sú názory, podľa ktorých existuje všeobecná schopnosť myslenia (stotožňujúc to so schopnosťou kritického myslenia), použiteľná alebo uplatniteľná v rôznych kontextoch (Ennis, 1989, Ennis, 1996). Na druhej strane sú prívrženci toho názoru,

ru, že myslenie je vždy kontextovo špecifické (McPeck, 1990), myslenie sa uplatňuje ako súčasť situovaného učenia (Lave, J. a Wenger, E., 1991). Wiliam (2013) dokonca argumentuje tým, že hocijaká snaha rozvíjať kritické myslenie v jednom predmete neznamená úspešné aplikovanie tejto schopnosti myslenia v inom predmete. Teórie vzdelávania majú tendenciu pozeráť sa na túto problematiku z hľadiska učenia sa poznania alebo rozvoja vedomostí, teda z genetického hľadiska, na čom je v skutočnosti založená všeobecne uznaná Piagetova teória kognitívneho vývinu.

V kognitívnom vývoji jedinca majú zásadnú rolu myšlienkové operácie. Tie tvoria základný kognitívny aparát človeka. Jeho základnými piliermi je štvorica zručností: zručnosť usporiadania, kombinatórna, logická zručnosť a zručnosť dokazovania (deduktívnym resp. induktívnym spôsobom). Z týchto zručností sa u detí vyvíja najskôr zručnosť usporiadania, ďalej sa vyvíja kombinatórna zručnosť a logické myslenie, a naposledy zručnosť dokazovania.

Prečo je dôležité logické myslenie? Dôsledkom absencie resp. nedostatočného logického myslenia majú žiaci problémy s pochopením a interpretáciou textu a vo všeobecnosti so spracovaním informácií, čo sťažuje učenie sa žiakov.

Dlhodobou sa nevenovalo výskumu jazykovo-logických operácií, vychádzajúc z presvedčenia, že sa tým nepoznáva celistvý proces myslenia žiakov a odhalia sa iba nedostatky použitia formálnej logiky (Molnár, 1996).

Vzťah myslenia, reči a jazyka

Ovplyvňuje jazyk myslenie? Je zrejme, že áno; preto ho prioritne používame. Aj to je zrejme, že jazyk výrazne ovplyvňuje myslenie prostredníctvom komunikácie. V každodennom živote prostredníctvom jazyka a reči používame množstvo logických štruktúr vytvorených spojками, ktoré sú zároveň operátory výrokovej logiky. Za logickou štruktúrou reči a písania sa skrýva dôležitý logický obsah. V prípade, že človek nedisponuje základným aparátom výrokovej logiky a logickým štruktúram nerozumie, nerozumie ani jej obsahu. Výskumná štúdia ukazuje, že jazyk má mierny vplyv na myslenie aj iným spôsobom ako prostredníctvom komunikácie, napríklad matematické uvažovanie, memoritery pre scény a priestorová navigácia (Bloom, P. a Keil, F. C., 2001). Jazyk skutočne hrá zaujímavú úlohu v tom, ako myslíme, nad rámec svojej úlohy pri komunikácii informácií.

Kognitívny vývin dieťaťa je spojený s osvojením si jazyka (Clark, 2003), z prác Piageta a Vygotského vieme, že síce korene genézy myslenia a jazyka sú odlišné, vo vývine jednotlivca sa však vekom ich prepojenie a vzťah zosilní.

U dieťaťa sa v druhom roku života prelína vývin reči s vývinom myslenia (Vygotskij, 2000). Trojročné dieťa komentuje svoje činy – je to jeho vnútorná reč (Piaget, 1999). Reč sa teda stáva v tomto štádiu nástrojom myslenia, vyjadrená slovami. Pojem „nahlas rozmýšľa“ súvisí taktiež s vnútornou rečou. Podľa Vygotského (2000) u troch až sedemročných detí vnútorná a vonkajšia reč splynie, myšlienka sa stáva hlavným nositeľom myslenia. Je pre nich typické egocentrické myslenie. Podľa Piageta (1970) rozdiel medzi spôsobom myslenia dospelých a detí je v tom, že dospelý rozmýšľa spoločensky, aj keď je sám, kým dieťa, aj keď je v spoločnosti

svojich rovesníkov, rozmyšľa egocentricky. Piaget vzťah jazyka a myslenia charakterizuje nasledovne:

- systém pravidiel logického myslenia nie je vrodenný, ale vyvíja sa postupne (a pomerne neskoro),
- samotný jazyk nie je striktne viazaný na logiku,
- logická povaha nášho myslenia závisí od vlastností štruktúr myšlienkových operácií, ktoré sa postupne rozvíjajú počas vývinu jednotlivca.

Výskumy ukazujú, že reč (jazyk) má najväčší efekt na rozvoj myslenia v štádiu formálnych operácií (u detí v období 11-tich až 15-tich rokov života) (Csapó, B. a Vidákovich, T., 1987).

Je zaujímavé, že u detí vývin gramatiky predbehne vývin logiky: výrazy ako napríklad „preto, lebo“, „totiž“, „vtedy, keď“, „ale“ a „naopak“ dieťa používa skôr, než by poznal a pochopil ich ozajstný logický význam. Podľa Chomského (2006) pri tvorbe vety z myšlienky, vykonávame postupnosť mentálnych transformácií, avšak štruktúra prirodzeného jazyka nie je založená na štruktúre logiky. Aby sme mohli skúmať logiku nezávisle od jazyka, potrebujeme logiku „očistiť“ od jazykových viazaností. Na takéto účely je optimálna formálna, výroková logika (Chomsky, 2006), ktorá je nezávislá od prirodzeného jazyka, ako aj od spôsobu a psychologických faktorov interpretácií (Molnár, 1996).

Vývin výrokovej logiky

Výroková logika formalizuje jazyk, prostredníctvom ktorého formulujeme matematické výroky; stanovuje pravidlá, na základe ktorých z výrokov vieme usudzovať nové výroky; analyzuje formy výrokových štruktúr a rozvíja metódy dokazovania.

Podľa Piageta (1970) náznaky logického myslenia z hľadiska formálnej logiky môžeme nájsť už v predoperačnom vývinovom štádiu dieťaťa (2 – 7 rokov). Sice dieťa v tomto štádiu ešte nechápe logické operácie, ani pravidlá, ale objavujú sa základné predpoklady formálnej logiky. Štádium konkrétnych operácií je dôležitým míľnikom logického myslenia. Popri typických charakteristikách tohto štádia, ako je logické uvažovanie o objektoch a udalostiach a pochopenie stálosti počtu, množstva a hmotnosti, objavujú sa aj elementy kombinátorného myslenia, ktoré je prekurzorom vývoja formálnej logiky (Molnár, 1996).

Podľa Piageta (1984) rozoznávanie pojmov „možné“ a „pravdivé“ vedie k vývoji dvojpremenných logických operácií, čo je predpokladom používania formálnej logiky, a teda formálneho myslenia. Dieťa sa ľahko a pomerne skoro naučí používať konjunkciu a disjunkciu. Neskôr v štádiu formálnych operácií (v jedenástich rokoch) sa dieťa naučí disponovať a operovať s pojmami „pravdepodobné“ a „možné“ aj v súvislosti so symbolickými objektmi. V tomto štádiu logické operácie pre dieťa tvoria ucelený systém. Myslenie má hypoteticko-deduktívny charakter, avšak dedukcia sa už nevzťahuje na reálne objekty, ale aj na pojmy, výroky a tvrdenia. Tinedžerom v tomto vývinovom štádiu (formálnych operácií) robia ťažkosti operácie hypoteticko-deduktívnej povahy na verbálnej úrovni, keďže namiesto reálnych objektov majú používať pojmy a výrazy. Ťažké je pre nich vybudovanie „novej“ logiky – systém

výrokovej logiky a hlavne aplikovať to na verbálnej úrovni v rôznych kontextoch je ťažkopádne. Piaget toto štádium nazýva aj obdobím výrokovej logiky (Piaget, J., Inhelder, B., 1984).

Súčasný trendy v rozvíjaní logického myslenia sa skôr orientujú na rozvíjanie jednotlivých elementov operácií podporujúce logické myslenie, než na holistický rozvoj všeobecného logického myslenia (Csapó B. et al., 2015) (Csapó, 2018). Ukazuje sa, že rozvoj zručností logického myslenia je efektívny, ak sa adaptujú vzdelávacie aktivity smerujúce na aplikáciu jednotlivých logických operácií, totiž práve ich správne použitie je predpokladom riadenia myslenia a jeho zdokonaľovania (Molnár, 1996). Je faktom, že je možné logicky myslieť aj bez poznatkov jednotlivých elementov formálnej logiky, ako napríklad vykonať kontrolu, spoznať chyby a vykonať korekcie. Skutočné myslenie sa totiž neriadi presne podľa formálnej logiky, ale jazyk a jeho mechanizmy sú spolu s poznatkami neoddeliteľnou súčasťou myšlienkových procesov.

V súčasnosti sa mnoho štúdií zaoberá diagnostikovaním kognitívnych schopností, medzi ktoré patrí aj schopnosť myslenia (Carlsson, M., Dahl, G. B., Öckert, B. a Rooth, D. O., 2015), (Csapó, B., Molnár, G. a Nagy, J., 2014), (Csapó, 2018), (Pásztor, 2019), a problematikou ich rozvíjania (Veres, 2016).

Štúdie, ktoré pristupujú k mysleniu prostredníctvom logiky prejavujúcej sa v jazyku, vo výrokoch, majú dlhšiu históriu, ktorá siaha do začiatku 20. storočia. Patria do troch hlavných oblastí, ktoré zhruba zodpovedajú tradičným kapitolám formálnej logiky: výroky (Nitta, N. a Nagano, S., 1966), (Braine, 1978), kvantifikátory (Revlis, 1975), (Johnson-Laird, 2005) a tranzitívne dedukcie (Huttenlocher, 1968), (Clark, 1969).

Sinnott (1998) skúmal piagetovými úlohami logické myslenie na dospelých v postformálnom štádiu kognitívneho vývinu a načrtnol možnosti rozvoja logického myslenia dospelých (Sinnott, 1998).

Výskumy kognitívnej psychológie pripúšťajú, že výroková logika nemôže byť tým najvhodnejším modelom ľudského uvažovania. Vo výsledku sa pokúsili navrhnúť alternatívne modely zodpovedajúce výkonu jednotlivcov pri riešení problémov s deduktívnym uvažovaním (Lourenço, 1995).

Všetky tieto alternatívne modely nakoniec tvrdia, že ľudská myseľ má viac než formálne alebo logické pravidlá. Ako Johnson-Laird (1983) poukázal na to, že najpozoruhodnejším problémom je, že ľudia robia chyby. Vyvodia neplatné závery, ktoré by sa nemali vyskytnúť, ak sa dedukcia riadi mentálnou logikou. Základným predpokladom akejkolvek formálnej logiky je, že dedukcie sú platné na základe ich formy, nie ich obsahu. Ak je v mysli stanovené pravidlo vyvodzovania, malo by platiť bez ohľadu na obsah návrhu (Lourenço, 1995).

Carey poukazuje na to, že jednoznačne sú odchýlky myslenia detí a dospelých v špecifických poznatkoch – deti sú zásadne vo všetkých pozorovaných oblastiach myslenia nováčikmi, kým dospelý prejavujú odbornosť myslenia. Táto štúdia načrtla hlavné oblasti problémov myslenia – a to v induktívnom myslení, epistemológii a filozofii vedy (Carey, 1985). Podľa Overtona a kol. (1987) „charakter logickej kompetencie aj charakter sémantického obsahu ovplyvňujú riešenie úloh“.

Úloha matematiky v rozvíjaní logiky v prírodovedných predmetoch

Vo všeobecnosti, ak sa hovorí o matematickom myslení, väčšina z nás svoju predstavu zúži na numerické myslenie, na úkony aritmetického charakteru. Ak to dáme do súvislosti s prírodovedným vzdelaním, tak hneď myslíme napr. na výpočty v chémii, vo fyzike alebo v biológii.

Prírodné vedy v spojitosti s myšlienkovými operáciami sú častokrát prepojené s matematickým myslením. Keď porovnáваме atribúty predmetu matematika a predmetov prírodných vied, stretávame sa s týmito spoločnými znakmi:

- Pochopenie informácií a ich jasné vyjadrenie pomocou matematického, vedeckého a technologického jazyka.
- Organizovanie práce a jej systematická realizácia.
- Vypracovanie stratégie a používanie kreatívneho prístupu pri hľadaní riešení.
- Používanie rôznych spôsobov argumentovania a zdôvodnení.
- Analýza dát a vyvodzovanie záverov z rôznych problémových situácií resp. z pozorovaní.
- Aplikovanie kritického myslenia a posudzovania v hodnotení dopadu resp. dôležitosti matematiky a prírodných vied na jedinca, spoločnosť a environment.
- Efektívne myslenie a konanie v každodennom živote s použitím matematických a prírodovedných poznatkov.

Matematika so svojou abstrakciou, exaktnosťou a axiomatickou štruktúrou tvorí nevyčerpatel'ný systém pravidiel a súvislostí, ktorý ponúka vynikajúce prostredie na mentálne činnosti aj v prípade, že nedisponujeme dostatočnými matematickými poznatkami (Gyarmathy, 2001).

V súčasnosti je už všeobecne akceptovaná téza, že matematika nie je zaradená medzi prírodné vedy, čo môžeme jednoducho vysvetliť tým, že matematika neskúma prírodné materiály a objekty, ako ani prírodné javy. Má odlišné metódy bádania a skúmania v porovnaní s fyzikou, chémiou resp. biológiou, pretože v týchto vedných disciplínach sú metódy získavania informácií založené na pozorovaní a experimentoch (Szarka, K. a Juhász, Gy., 2019), (Jaruska, 2014). Matematika svoje nové poznatky získava axiomaticko-deduktívnym spôsobom, odhaľujúc vlastnosti abstraktných systémov a súvislostí ostatných vedných disciplín, ako aj vlastnej vnútornej štruktúry, pričom jej základným pilierom je abstrakcia a konzekventné dodržiavanie príčinnno-dôsledkových, kauzálnych pravidiel (Szendrei, J. a Szendrei, M., 2011).

Mylná je predstava, že človek sa narodí s hotovým aparátom matematického myslenia (Vince, 2003). Kognitívny rozvoj matematického myslenia vyžaduje určitý čas. V ideálnom prípade tento proces možno urýchliť, ak sú aplikované zámerné stratégie rozvíjajúceho hodnotenia, ktoré premietajú rôzne úrovne kritérií a očakávania voči schopnostiam myslenia (Nunes, T. a Csapó, B., 2011).

Matematika, ako vedná disciplína a ako vyučovací predmet, môže formovať myslenie študentov takým spôsobom, aby vedeli aplikovať matematické poznatky aj v

iných predmetoch a riešiť každodenné problémy aj mimo školy. Matematika ponúka systematický prístup pre študentov riešiť rôzne problémy a jej aparát je vhodný na modelovanie prírodovedných a spoločenskovedných javov (Csapó, B. a Szendrei, M., 2011).

Podľa Piageta (1970) by sa matematika mala vyučovať tak, aby podporovala osvojenie si logicko-matematických štruktúr. Výučba matematiky by mala sledovať proces prirodzeného vývinu týchto štruktúr (Piaget, 1970).

Analýzy súčasných učebníc chémie taktiež poukazujú na značnú absenciu týchto elementov v učebniciach (Gašperová, E., Braniša, J. a Jenisová, Z., 2019), ktoré sú zodpovedné za stimuláciu myšlienkových procesov, kritického myslenia a hodnotenia, teda práve tých zručností, ktoré sú zásadné pre úspešnosť v 21. storočí.

V rámci štúdia analýzy názorov budúcich učiteľov rôznych aprobácií orientovaných na ich pripravenosť z hľadiska spôsobilosti argumentácie (deduktívnej a induktívnej) a použitie formálnej logiky, ktoré sú zásadnými komponentmi kritického myslenia, študenti uvádzajú, že škola neposkytuje dostatočný priestor ani čas na rozvoj argumentačných schopností študentov (Kosturková, M. a Velmovská, K., 2019).

Záver

Rozvíjaním matematického myslenia v podstate rozvíjame všeobecnú kultúru myslenia, pričom prioritným cieľom je, aby sme vedeli vybrať a aplikovať modely, metódy a popisy myslenia najviac vyhovujúce prírodovedným a spoločenskovedným javom.

Samotný proces matematického učenia a učenia sa vedie aj k pochopeniu úlohy matematiky v prírodovedných a spoločenskovedných disciplínach a v mnohých ďalších odvetviach ľudskej kultúry. Umožňuje vytvorenie myšlienkového bázis, ktorá podporuje hľadanie súvislostí, formuláciu hypotéz a predikcií, ako aj ich a dokazovanie a argumentáciu.

Odpoveďou teda na často vynárajúcu sa otázku: prečo sa učiť a učiť matematiku, je jednoznačná. Matematika je (vždy bola) a aj bude súčasťou našej kultúry; je modelom logického myslenia; slúži, ako univerzálny a zovšeobecňujúci jazyk pre popis prírodných javov a javov, ktoré sú skúmané inými vednými disciplínami a zároveň je nositeľom takých kompetencií, ktoré sú kľúčové pre úspešnosť v budúcnosti.

PodĎakovanie: *Tento príspevok vznikol s finančnou podporou projektu KEGA č. 004UPJŠ-4/2020 „Tvorba, implementácia a overovanie efektívnosti digitálnej knižnice s nástrojmi formatívneho hodnotenia pre prírodovedné predmety, matematiku a informatiku na základnej škole”, VEGA č. 1/0663/19 „Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík“.*

Literatúra

- Bloom, P. a Keil, F. C. 2001. Thinking through language. *Mind and language*. 2001, Zv. 16, 4, s. 351-367.
- Braine, M. D. 1978. On the relation between the natural logic of reasoning and standard logic. *Psychological review*. 1978, Zv. 85, 1.
- Carey, S. 1985. *Are children fundamentally different kinds of thinkers and learners than adults?* [aut. knihy] S.F., Segal, J.W. a R. Glaser (Eds.) Chipman. Thinking and learning skills, 2. s.l. : Routledge Taylor & Francis Group, 1985, s. 485-517.
- Carlsson, M., Dahl, G. B., Öckert, B. a Rooth, D. O. 2015. The effect of schooling on cognitive skills. *Review of Economics and Statistics*. 2015, Zv. 97, 3, s. 533-547.
- Chomsky, N. 2006. *Language and mind*. s.l.: Cambridge University Press, 2006.
- Clark, H. H. 1969. Linguistic processes in deductive reasoning. *Psychological review*. 1969, Zv. 76, 4.
- Clark, E. V. 2003. Languages and representations. [aut. knihy] D. a S. Goldin-Meadow (Eds.) Gentner. *Language in mind: Advances in the study of language and thought*. London: A Bradford Book, 2003, s. 17-24.
- Csapó B. et al. 2015. *A természettudományi tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei*. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet, 2015. ISBN 978-963-19-7937-4.
- Csapó, B. 2018. *Diagnosztikus értékelés és differenciált fejlesztés: új eredmények és perspektívák*. In: Kónyáné Tóth Mária és Molnár Csaba (szerk.): Köznevelés, szakképzés. 2018, s. 215-225.
- Csapó, B., a Szendrei, M. 2011. Bevezetés. [aut. knihy] B. a Szendrei, M. Csapó. *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 2011, s. 8-15.
- Csapó, B. a Vidákovich, T. 1987. A nyelvi-logikai műveletrendszer fejlettsége 14 éves korban. *Pszichológia*. 1987, Zv. 7, 4, s. 521-544.
- Csapó, B., Molnár, G. a Nagy, J. 2014. Computer-based assessment of school readiness and early reasoning. *Journal of educational psychology*. 2014, Zv. 106, 3, s. 639.
- Ennis, R. H. 1989. Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research. *Educational researcher*. 1989, Zv. 18, 3, s. 4-10.
- Ennis, R. H. 1996. Critical thinking dispositions: Their nature and assessability. *Informal logic*. 1996, Zv. 18, 2.
- Gášperová, E., Braniša, J. a Jenisová, Z. 2019. Didaktická vybavenosť aktuálnych učebníc chémie. [aut. knihy] J. a Koleňáková, R. Duchovičová. *Inovatívne trendy v odborových didaktikách: prepojenie teórie a praxe výučbových stratégií kritického a tvorivého myslenia. Zborník štúdií z medzinárodnej vedeckej konferencie*, Nitra 21. november 2018. Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2019, s. 302-308.
- Gyarmathy, É. 2001. *A tehetségéről*. Miskolc: Arany János Tehetséggondozó Program Intézményeinek Egyesülete, 2001.
- Huttenlocher, J. 1968. Constructing spatial images: A strategy in reasoning. *Psychological review*. 1968, Zv. 75, 6.
- Jaruska, L. 2014. Presentation of the Relation Between Mathematics and Physics by the

Dynamic Modeling, *Information and Communication Technology in Education*. Ostrava, 2014. s. 106-111.

Johnson-Laird, P. 1983. *Mental models: Toward a cognitive science of language, inference and consciousness*. Cambridge MA: Harvard University Press.

Johnson-Laird, P. N. 2005. Mental models and thought. [aut. knihy] K.J. a Morrison, R.G. (Eds.) Holyoak. *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*. s.l. : Cambridge University Press, 2005, s. 185-208.

Kosturková, M. a Velmovská, K. 2019. Názory študentov učiteľstva na rozvoj ich argumentačných schopností. *Edukácia*. 3, 2019, 1, s. 110-118.

Lave, J. a Wenger, E. 1991. *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. s.l. : Cambridge university press, 1991.

Lourenço, O. 1995. Piaget's logic of meanings and conditional reasoning in adolescents and adults. *Archives de Psychologie*. 1995, Zv. 63, 246, s. 187-203.

McPeck, J. E. 1990. Critical thinking and subject specificity: A reply to Ennis. *Educational researcher*. 1990, Zv. 19, 4, s. 10-12.

Molnár, I. 1996. *Nyelvi-logikai képességfejlesztés a 8. osztályos kémia tanításban*. Dissertation theses. Szeged : JATE Bölcsész tudományi Kar, 1996.

Nitta, N. a Nagano, S. 1966. Basic logical operations and their verbal expressions: Child's conception of logical sum and product. *Research Bulletin of the National Institute for Educational Research*. 1966.

Nunes, T. a Csapó, B. 2011. A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése. [aut. knihy] B. a Szendrei, M. Csapó. *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 2011, s. 17-57.

Pásztor, A. 2019. Induktív és kombinatív gondolkodás fejlettségének online vizsgálata egyetemi tanulmányait kezdő hallgatók körében. *Iskolakultúra*. 2019, Zv. 29, 1, s. 42-54.

Piaget, J. 1999. *Szimbólumképzés a gyermekkorban - Utazás, játék és álom; A kép és ábrázolás*. s.l.: Kairos Kiadó Kft., 1999. ISBN 9789639137776.

Piaget, J. 1970. *Válogatott tanulmányok*. [prekl.] M., Fodor, G., Józsa, P. a Á. Kiss Gergely. Budapest: Gondolat Kiadó, 1970.

Piaget, J., Inhelder, B. 1984. *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig- A formális műveleti struktúrák kialakulása*. [prekl.] Kiss Á. Budapest : Akadémiai Kiadó, 1984.

Revlis, R. 1975. Two models of syllogistic reasoning: Feature selection and conversion. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*. 1975, Zv. 14, 2, s. 180-195.

Sinnott, J.D. 1998. *The development of logic in adulthood: Postformal thought and its applications*. Boston, MA : Springer Science & Business Media, 1998.

Szarka, K. a Juhász, Gy. 2019. Rozvoj matematického myslenia v chemickom vzdelávaní. *Biológia, ekológia, chémia: časopis pre školy*. 2019, Zv. 23, 3, s. 9-16.

Szendrei, J. a Szendrei, M. 2011. A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai. [aut. knihy] B. a Szendrei, M. Csapó. *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 2011, s. 99-139.

Veres, G. 2016. Gondolkodás-és képességfejlesztés: Kihívások és megoldások a SAILS projektben. *Iskolakultúra*. 2016, Zv. 26, 3, s. 43-56.

Vygotskij, L. Sz. 2000. *A gondolkodás és a beszéd*. [prekl.] E. a T., Tóth Páll. s.l.: Trezor Kiadó, 2000. ISBN 963 9088 40 4.

Vince, Sz. 2003. A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával. *Magyar Pedagógia*. 2003, Zv. 103, 2, s. 229–261.

Wiliam, D. 2013. *Principled curriculum design*. s.l. : SSAT (The Schools Network) Ltd., 2013. ISBN 978-1-906524-93-7.